جامعة البعث	امتحانات الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨	المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم	أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)	العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	الاسم : [redacted]

السؤال الأول (٢٨ درجة):

(١) ليكن $q, 1 < p < \infty$ بحيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ عندئذ يكون :

$$\int_a^b |f(x).g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(٢) ليكن P نصف نظيماً على فضاء خطي X ، ولتكن المجموعة

$$E = \{x \in X : P(x) < r\} \quad , \quad r > 0$$

المطلوب: أثبت أن المجموعة E محدبة ومتوازنة وماصة .

(٣) لتكن الدالة المعرفة على الفضاء $\mathbb{R}^n$ بالشكل :

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

هل تشكل نظيماً على $\mathbb{R}^n$ ؟ من أجل $0 < p < 1$, $n \geq 2$ وضح ذلك مع الحل .

السؤال الثاني (٢٢ درجة):

(أ) أثبت أن :(١) كل فضاء خطي منظم ذو n بعداً هو فضاء باناخ .

(٢) الفضاء المتري هوفضاء هاوسدورف طبولوجي .

(ب) ليكن : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة ويحقق $|f'(x)| \leq \alpha < 1 \ , \forall x \in \mathbb{R}$ المطلوب :

أثبت أنه تطبيق ضاغط على $\mathbb{R}$ ، وهل مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$ ؟ بين ذلك مع الحل .

السؤال الثالث (٦+٧=١٣درجة):

أ)- أثبت أن $(T^*)^* = T$ ثم بين أن $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

ب)- أثبت أن $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$

السؤال الرابع (١٥+٥=٢٠ درجة):

أ)- ليكن A مؤثراً خطياً حيث $A: D(A) \to H$ و $D(A)$ كثيفة في H أثبت الآتي:

1. $D(A^*)$ فضاء خطي جزئي في H ، A^* مؤثر خطي .
2. A^* مؤثر مغلق .
3. إذا كان $A \subset B$ فإن $A^* \supset B^*$.

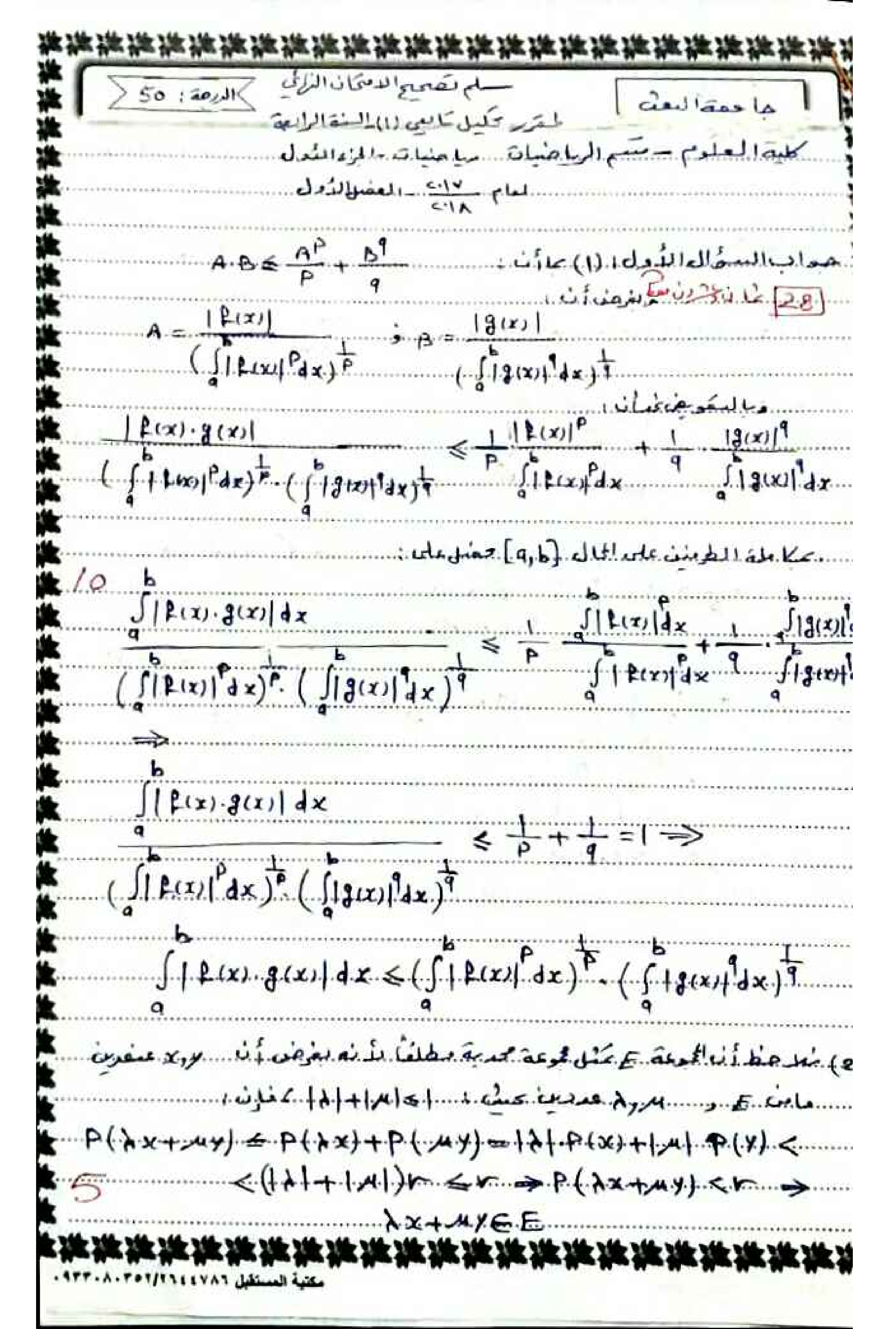
ب)- إذا كان X فضاء جداء داخلي و $A \subset X$ و $B \subset A$ أثبت عندئذٍ أن $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

السؤال الخامس (٧+١٠=١٧ درجات):

أ)- إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات تتقارب بضعف من A ، فبين أن المتتالية $\{A_n^*\}$ تتقارب بضعف من A^* عندما $n \to \infty$. أما إذا كان $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ (تقارب نقطي) فهذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن $A_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} A^*$ (تقارب نقطي) . اذكر مثالاً توضح فيه ذلك .

ب)- أوجد C_0^* الفضاء المرافق لفضاء المتتاليات العددية المتقاربة من الصفر C_0 .

حمص في ٣ / ١ / ٢٠١٨م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق د. سامح العرجة، د. منيز مخلوف



جامعة البعث

سلم تصحيح الامتحان النظري — الدرجة: 50

لمقرر تحليل تابعي (1) السنة الرابعة

كلية العلوم – قسم الرياضيات – رياضيات – الجزء الأول

لعام $\frac{2017}{2018}$ – الفصل الأول

جواب السؤال الأول: (1) بما أن: $A\cdot B \le \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$

28 [illegible] بفرض أن:

$$A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$\frac{|f(x)\cdot g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

بمكاملة الطرفين على المجال $[a,b]$ نحصل على:

10

$$\frac{\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\,\frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

2) نلاحظ أن المجموعة E تمثل مجموعة محدبة مطلقاً لأنه بفرض أن x,y عنصرين ما من E و λ,μ عددين بحيث: $|\lambda|+|\mu|\le 1$ نحصل:

$$P(\lambda x+\mu y) \le P(\lambda x)+P(\mu y) = |\lambda|\cdot P(x)+|\mu|\cdot P(y) <$$

5

$$< (|\lambda|+|\mu|)\,r \le r \Rightarrow P(\lambda x+\mu y) < r \Rightarrow$$

$$\lambda x+\mu y \in E$$

ونعلم أنه كل مجموعة محدبة مطلقاً تكون محدبة ومتوازنة، وبالتالي المجموعة E هي مجموعة محدبة ومتوازنة.

أيضاً المجموعة E هي مجموعة ماصة لأنه لو فرضنا أن ρ عبارة عن $\rho = \frac{r}{1+p(x)}$

نجد أن: $\rho = \rho(x) > 0$، ولنأخذ λ كيث: $|\lambda| \leq \rho$

5

وبالتالي يكون:

$$p(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot p(x) \leq \rho \cdot p(x) = r \cdot \frac{p(x)}{1+p(x)} < r \Rightarrow$$

$$p(\lambda x) < r \Rightarrow \lambda x \in E$$

(3) نلاحظ أن الموضوعة الثالثة من موضوعات النظيم غير محققة. لأنه لو أخذنا المتجهين:

$$x = (\tfrac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$y = (0, \tfrac{1}{2}, 0, \dots, 0)$$

من الفضاء R^n نلاحظ أن: $x \neq y$، كما أن:

$$\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2} \; ; \quad \forall \; 0 < p < 1$$

$$\|x\| + \|y\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad ,$$

إلا أن:

8

$$\|x+y\| = \|(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, \dots, 0)\| = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{\frac{1-p}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1}$$

وبما أن $0 < p < 1$ فإن: $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$ أي أن:

$$\|x+y\| > \|x\| + \|y\|$$

وهذا يعني بأن الموضوعة الثالثة من موضوعات النظيم غير محققة.

جواب السؤال الثاني: (1) لتكن E فضاءً نظيماً منتهٍ ذو n البعد، ولتكن
22 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ قاعدة في E، ولنأخذ أي متتالية كوشي
(x^N) في E، عندئذٍ يكون

$$x^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(N)} x_i \quad , \quad (N = 1, 2, \dots) \text{ و } \|x^N\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^N|$$

ومن أجل: $i = 1, 2, \dots, n$ يكون لدينا:

$$|\lambda_i^{(M)} - \lambda_i^{(N)}| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(M)} - \lambda_i^{(N)}| = \|x^M - x^N\| \xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ M \to \infty}]{} 0$$

وهذا يعني أن المتتالية العددية $(\lambda_i^{(N)})$ هي متتالية كوشي من أجل: $i = 1, 2, \dots, n$
وهي متقاربة (التقارب هنا هو التقارب الاعتيادي). لذلك نفرض أنه:
$\lambda_i^{(N)} \to \lambda_i^0$ عندما $N \to \infty$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

8

وأنه:

$$x^0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 x_i$$

فنجد أنه:

$$\|x^N - x^0\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^0| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

إذن الفضاء E هو فضاء تام.

(2) إذا كان (X, d) فضاءً مترياً، ولتكن a, b نقطتين ما من X بحيث أن: $d(a,b) > 0$ $(a \neq b)$، فإن الكرات المفتوحة:
$S(a, r)$ و $S(b, r)$
6 لاحظ أن: $r = \frac{1}{2} d(a,b)$،
التي تحوي a و b على الترتيب لا يمكن لها أن تتقاطع. مع الأخذ بعين الاعتبار
أن $S(a, r)$ و $S(b, r)$ كل منها مجاورة مفتوحة لـ a و b على الترتيب
لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

(3) بما أن التطبيق f يملك مشتقاً محدوداً على $\mathbb{R}$، وبالتالي حسب مبرهنة لاغرانج (مبرهنة التزايدات المحدودة) يكون لدينا:

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq \alpha \cdot |x - y| \Rightarrow$$

5 $$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad ; \quad x < c < y \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

الأمر الذي يعني بأن f تطبيقاً ضاغطاً على $\mathbb{R}$.

[illegible] : $\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\alpha} : d(x,y) < \delta \Longrightarrow$

$\Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x,y) < \alpha \cdot \delta = \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$

3 فإذن التطبيق f هو مستمر بانتظام على R.

مدرس المقرر :

د. منير مخلوف

جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨ — المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم — سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) — العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

جواب السؤال الأول خاص للدكتور منير مخلوف

جواب السؤال الثاني خاص للدكتور منير مخلوف

جواب السؤال الثالث (٦+٧=١٣درجة)

أ)

لنبين أولاً أن $(T^*)^*=T$: $(y,(T^*)^*x)=(T^*y,x)=\overline{(x,T^*y)}=\overline{(Tx,y)}=(y,Tx)$ وبالتالي فإن

$(T^*)^*x=Tx$ وذلك من أجل كل $x\in H$ وبالتالي $(T^*)^*=T$.

ثانياً: بما أن $\|T\|=\|T^*\|$ فإن: $\|T^*T\|\le\|T^*\|\|T\|=\|T\|^2$

ومن جهة أخرى:

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\le\|T^*Tx\|\|x\|\le\|T^*T\|.\|x\|^2$$

وبالتالي $\|T\|^2\le\|T^*T\|$ بذلك نستنتج أن $\|T\|^2=\|T^*T\|$.

ب)

إن $\ker T\subseteq(\operatorname{Im}T^*)^\perp$ وذلك لأنه من أجل $x\in\ker T$ و $z\in\operatorname{Im}T^*$. بما أن $z\in\operatorname{Im}T^*$ فإنه يوجد $y\in K$ بحيث أن $T^*y=z$.

$$(x,z)=(x,T^*y)=(Tx,y)=0$$

عندئذ $x\in(\operatorname{Im}T^*)^\perp$ وبالتالي $\ker T\subseteq(\operatorname{Im}T^*)^\perp$.

إثبات المتراجحة المعاكسة: إن $(\operatorname{Im}T^*)^\perp\subseteq\ker T$ وذلك لأنه من أجل $v\in(\operatorname{Im}T^*)^\perp$ فإن: $T^*Tv\in\operatorname{Im}T^*$ وبالتالي:

$$(Tv,Tv)=(v,T^*Tv)=0$$

أي أن $Tv=0$ وبالتالي فإن $v\in\ker T$ وبذلك نكون قد برهنا أن $\ker T=(\operatorname{Im}T^*)^\perp$. وهو المطلوب

جواب السؤال الرابع (١٥+٥=٢٠درجة):

أ)

1. ليكن $y_1,y_2\in D(A^*)$ وليكن $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$ ولنثبت أن $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\in D(A^*)$ ، ليكن x عنصراً اختيارياً $x\in D(A)$ عندئذ:

$$\langle Ax,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\rangle=\overline{\alpha_1}\langle Ax,y_1\rangle+\overline{\alpha_2}\langle Ax,y_2\rangle=\overline{\alpha_1}\langle x,y_1^*\rangle+\overline{\alpha_2}\langle x,y_2^*\rangle=$$

$$=\overline{\alpha_1}\langle x,A^*y_1\rangle+\overline{\alpha_2}\langle x,A^*y_2\rangle=\langle x,\alpha_1A^*y_1\rangle+\langle x,\alpha_2A^*y_2\rangle=\langle x,A^*(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\rangle\Rightarrow$$

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\in D(A^*)$$

إن المؤثر A^* خطي لأن:

$\langle x, A^*(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)\rangle = \langle Ax, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\rangle = \alpha_1\langle Ax, y_1\rangle+\alpha_2\langle Ax, y_2\rangle =$

$\overline{\alpha_1}\langle x, A^*y_1\rangle+\overline{\alpha_2}\langle x, A^*y_2\rangle = \langle x, \alpha_1 A^*y_1\rangle+\langle x, \alpha_2 A^*y_2\rangle = \langle x, \alpha_1 A^*y_1+\alpha_2 A^*y_2\rangle \Rightarrow$

$A^*(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 A^*y_1+\alpha_2 A^*y_2$

2- لتكن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A^*)$ متتالية اختيارية من $D(A^*)$ بحيث يكون $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ وبحيث يكون

وبالتالي: $A^*y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle Ax, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, A^*y_n\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} A^*y_n\rangle = \langle x, z\rangle$$

وبالتالي $y\in D(A^*)$ ، $z=A^*y$ وبالتالي A^* مؤثر مغلق.

3- بما أن $A\subset B$ فإن $D(A)\subset D(B)$ و $\forall x\in D(A)$ $Ax=Bx$ وكون $D(A)$ كثيفة في H فإن $D(B)$ كثيفة في H (لأنها تحوي مجموعة كثيفة) وبالتالي يمكننا الحصول على B^* بالشكل:

$$\forall x\in D(A)\ ,\ \forall y\in D(B^*) \Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle \Rightarrow$$

$$y\in D(A^*) \quad \& \quad A^*y=B^*y$$

$$D(B^*)\subset D(A^*) \quad \Rightarrow \quad B^*\subset A^*$$

ب- نفرض $A\subset X$ و $B\subset A$ ولنبين أن $A^{\perp}\subset B^{\perp}$.

نفرض أن $x\in A^{\perp}$ ومن أجل أي $a\in B$ فإن $\langle x, a\rangle=0$ (لأن $B\subset A$) هذا يعني $x\in B^{\perp}$ يتم المطلوب.

<u>جواب السؤال الخامس ([illegible] درجات):</u>

نقول عن متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ في فضاء هيلبرت H أنها تتقارب بضعف من المؤثر A إذا كان لدينا:

$\langle A_n f, g\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle Af, g\rangle\ ;\ \forall f,g\in H$ من هنا ينتج أنه إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات تتقارب بضعف من

A عندئذ المتتالية $\{A_n^*\}$ تتقارب بضعف من A^* عندما $n\to\infty$ لأنه يكون $\langle f, A_n^*g\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, A^*g\rangle$.

أما إذا كان $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ (تقارب نقطي) فهذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن $A_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} A^*$ (تقارب نقطي).

في المتتالية التالية على الفضاء ℓ_2 المؤثرات: $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell_2\ ;\ A_n(x_1,x_2,\dots)=(x_{n+1},x_{n+2},\dots)$

عندئذ لدينا: $A_n^*(x_1,x_2,\dots)=(\underbrace{0,\dots,0}_{n},x_1,x_2,\dots)$

بينما يكون $A_nx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وذلك من أجل أي $x\in\ell_2$، ويكون: $\|A_n^*x\|=\|x\|$

ب- إيجاد C_0^* الفضاء المرافق لفضاء المتتاليات العددية المتقاربة من الصفر C_0.

يمكن صياغة الدالي الخطي المستمر المعرف على الفضاء C_0 بالشكل:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_i \quad ; x \in C_0 \ , \ f_i = f(e_i) \ \& \ e_1=(1,0,0,....), e_2=(0,1,0,....),......$$

حيث : $\|f\|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|<\infty$.

الفضاء المرافق للفضاء C_0 هو الفضاء ℓ_1 .

في الحقيقة إذا كانت لتكن $\{e_1,e_2,....,e_n,....\}$ قاعدة في C_0 عندئذ من أجل أي عنصر $x \in C_0$ يمكن أن نكتب : $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$.إن الدالي الخطي المستمر المعرف على C_0 هو:

$$f(x)=f\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i$$

2

أي أن : $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i \qquad (1)$$

لدينا $\|x\|=\sup_i|\xi_i|$ هو النظيم في C_0 وبالتالي يكون لدينا :

2

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i||f_i|\le\sup_i|\xi_i||f_i|=\|x\|\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|$$

وبالتالي فإن :(2) $$\|f\|\le\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|$$

من ناحية أخرى إذا أخذنا العنصر x_0 من C_0 بحيث : $x_0=\sum_{i=1}^{\infty}Sign f_i \, e_i$ فإن: $\|x_0\|=1$ حيث :

2

$$Sign\ \lambda=\begin{cases}\frac{|\lambda|}{\lambda} & if\ \lambda\ne 0\\ 0 & if\ \lambda=0\end{cases}$$

ويكون لدينا :

$$f(x_0)=\sum_{i=1}^{\infty}sign f_i \, f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}sign f_i . f_i=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|\,\|x_0\|$$

وبالتالي فإن : 2 $$\|f\|\ge\sum_{i=1}^{\infty}|f_i| \qquad (3)$$

بمقارنة (2),(3) نجد أن : $$\|f\|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|$$

2

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_1 وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق للفضاء C_0 هو الفضاء ℓ_1 .

حمص في ٣١ / ١ / ٢٠١٨ م. انتهت الإجابات مدرسا المقرر

د. سامح الكوجة ، د. منير مخلوف .